

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ

ФАКУЛЬТЕТ ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ И ОБУЧЕНИЯ
ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ

МАТЕМАТИКА

Часть 1. Алгебра.

Учебно-методическое пособие для слушателей очно – заочных и заочных
подготовительных курсов.

Электронная версия

Лемешев В.П.

Гомель 2015 г.

Введение.

Данное пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов, сочетающих самостоятельную подготовку к централизованному тестированию с аудиторной работой. В первой части приводятся алгебраические понятия и формулы школьной математики, составляющие основу подготовки к вступительным испытаниям. Материал собран и систематизирован по темам, имеющим независимые теоретические положения, и может быть использован для отдельной подготовки вне рамок школьной программы.

1. Числовые и алгебраические выражения.

1.1. Числовые выражения.

1.1.1. Натуральные числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

Числа, употребляемые при счёте предметов, называют *натуральными*. Наименьшим натуральным числом является число 1. Наибольшего натурального числа не существует. Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют бесконечный ряд натуральных чисел, который можно записать так: 1, 2, 3, ... Ряд натуральных чисел обозначают N .

Натуральное число p называют *простым*, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число. *Составным* называют такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, так как оно имеет лишь один натуральный делитель: само это число. Числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 являются простыми, а числа 4, 6, 8, 9, 10 - составные.

Всякое натуральное число, на которое делятся одновременно числа a и b , называют *общим делителем* этих чисел. Наибольший из общих делителей чисел a и b называют их *наибольшим общим делителем* (обозначается НОД(a, b)). Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ для некоторых простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ и натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то $\text{НОД}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n}$, где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Всякое натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел a и b , называют *общим кратным* этих чисел. Наименьшее из таких чисел называется *наименьшим общим кратным чисел a и b* (НОК(a, b)). Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ для некоторых простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ и натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то $\text{НОК}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n}$, где $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Справедлива формула $a \cdot b = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$.

1.1.2. Признаки делимости 2, 3, 4, 5, 9, 10

Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2.

Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Натуральное число, содержащее не менее трёх цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.

Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.

Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

1.1.3. Целые числа. Противоположные числа. Действия над целыми числами.

Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называют положительными числами. Числа $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$ называют противоположными натуральным или отрицательными числами. Модулем целого числа $|a|$ называется само это число a , если оно положительно и противоположное ему число $-a$, если оно отрицательно.

Натуральные числа, противоположные им числа и нуль называют *целыми числами*. Множество всех целых чисел обозначают Z :

$$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Сложение целых чисел подчинено переместительному (коммутативному) и сочетательному (ассоциативному) законам, выражаемым соответственно равенствами:

- 1) $a + b = b + a$;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$, для любых целых чисел a, b, c .

Умножение целых чисел также обладает переместительным и сочетательным свойствами,

выражаемыми для любых значений a, b, c соответственно равенствами:

- 3) $a \cdot b = b \cdot a$;
- 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

При любых значениях a, b, c выполняется равенство:

- 5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Это свойство выражает распределительный закон умножения относительно сложения. Введение отрицательных чисел делает выполнимым действие вычитания над целыми числами (разность $a - b$ имеет смысл и при $a < b$). Арифметические действия над целыми числами выполняют по правилам, приведённым ниже.

1. Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно сложить их модули и перед полученным числом поставить минус. Например,

$$(-12) + (-9) = -(12 + 9) = -21.$$

2. Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего числа вычесть меньшее и поставить знак большего числа. Например,

$$54 + (-32) = +(54 - 32) = 22;$$

$$(-45) + 21 = -(45 - 21) = -24;$$

$$18 + (-22) = -(22 - 18) = -4;$$

$$(-13) + 28 = +(28 - 13) = 15.$$

Сумма противоположных чисел всегда равна нулю.

3. Если надо сложить несколько чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, можно сложить отдельно положительные и отдельно отрицательные, а потом к сумме положительных чисел прибавить сумму отрицательных чисел. Например, $23 + 11 + (-10) + (-32) = 34 + (-42) = -8$.
4. Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.
5. Чтобы перемножить два числа с разными знаками, нужно перемножить модули этих чисел и перед полученным числом поставить минус.
6. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули и взять их со знаком плюс.
7. Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное, надо разделить модуль делимого на модуль делителя. Частное двух отрицательных чисел есть число положительное.
8. Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо разделить модуль делимого на модуль делителя и перед полученным числом поставить минус.

1.1.4. Рациональные числа. Действия над рациональными числами. Сравнение рациональных чисел.

Рациональными числами называется множество всевозможных дробей вида $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. В рациональной дроби $\frac{a}{b}$ число a называют *числителем*, а число b - *знаменателем*.

Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *равными* тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$, т. е.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (a \cdot d = b \cdot c).$$

Это соотношение эквивалентности обладает следующими свойствами:

- 1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$;
- 2) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$;
- 3) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, то $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

Первое свойство называют свойством рефлексивности, второе - *свойством симметричности*, третье - *свойством транзитивности*.

Таким образом, одно и то же рациональное число может быть записано разными, но эквивалентными дробями. Например, рациональное число $\frac{2}{3}$ можно записать каждой из рациональных дробей:

$$\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \dots, \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n}, \dots (n \in \mathbb{N}).$$

Множество рациональных чисел обозначают Q . Таким образом,

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}.$$

Арифметические действия над рациональными числами определяются следующим образом:

Суммой дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют дробь, определяемую формулой

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
 Эта формула означает следующее:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd},$$

т. е. дроби с различными знаменателями приводятся к общему знаменателю; при сложении дробей с одинаковыми знаменателями складываются их числители. Например,

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20}.$$

Произведением дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют дробь $\frac{ac}{bd}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Эта формула означает, что при умножении дробей отдельно перемножаются числители и отдельно - знаменатели, полученные результаты соответственно будут числителем и знаменателем произведения данных дробей. Например,

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{56}.$$

Разностью $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют дробь $\frac{x}{y}$, такую, что $\frac{c}{d} + \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Откуда, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{(-c)}{d} = \frac{ad + (-c)b}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$. Итак

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Частным $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют такую дробь $\frac{x}{y}$, для которой

$\frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, $\frac{cx}{dy} = \frac{a}{b}$. Из этой формулы получаем

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Полученная формула означает следующее: чтобы разделить одну дробь на другую, достаточно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй и произведение записать числителем; числитель второй дроби умножить на знаменатель первой и результат записать знаменателем.

Из двух положительных рациональных дробей с равными знаменателями больше та, числитель которой больше, и меньше та, знаменатель которой меньше:

$$\left(\frac{a}{c} > \frac{b}{c}\right) \Leftrightarrow (a > b).$$

Из двух положительных рациональных дробей с равными числителями больше та, знаменатель которой меньше, и меньше та, знаменатель которой больше:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow (b < c).$$

Положительную рациональную дробь, числитель которой меньше знаменателя, называют *правильной*. Положительная рациональная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется *неправильной*. Правильная дробь меньше единицы, а неправильная больше или равна единице, поэтому любая неправильная дробь больше любой правильной дроби.

Неравенство двух положительных рациональных дробей с различными знаменателями в общем случае определяется следующим соотношением:

$$\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad < bc).$$

Сравнение рациональных чисел производится следующим образом. Всякая положительная дробь $\frac{a}{b}$ считается больше нуля: $\frac{a}{b} > 0$; всякое отрицательное рациональное число $\frac{c}{d}$ считается меньше нуля: $\frac{c}{d} < 0$; всякое отрицательное рациональное число меньше всякого положительного. Положительное рациональное число $\frac{a}{b}$ считается меньше положительного рационального числа $\frac{c}{d}$: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, если $ad < bc$. Отрицательное рациональное число $\frac{a}{b}$ считается меньше отрицательного рационального числа $\frac{c}{d}$, если положительное рациональное число $-\frac{a}{b}$ больше положительного рационального числа $-\frac{c}{d}$: $-\frac{a}{b} > -\frac{c}{d}$.

Модуль $|r|$ рационального числа определяется так: $|r| = r$, если $r \geq 0$; $|r| = -r$, если $r < 0$.

Всякое рациональное число $\frac{m}{n}$, выполнив деление, можно представить в виде некоторой бесконечной десятичной дроби. Например,

$$\frac{3}{8} = 0,375000000\dots, \quad \frac{4}{3} = 1,33333333\dots.$$

Все такие дроби содержат последовательно повторяющиеся группы цифр. Минимальная из этих групп называется *периодом*. Любая бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется *периодической*. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется *чистой периодической*; если же между запятой и периодом есть

другие десятичные знаки, то дробь называется *смешанной периодической*. Так, $4,25(345) = 4,25345345345\dots$ - смешанная периодическая дробь, а $2,(6) = 2,66666666\dots$ - чистая периодическая дробь. Таким образом, справедлива

Теорема. *Каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью.*

С другой стороны всякую такую дробь можно обратить в некоторое рациональное число (предварительно отбросив целую часть) по следующим правилам:

- 1) если дробь чисто периодическая, то она равна обыкновенной, у которой числитель равен периоду, а знаменатель содержит столько девяток сколько цифр в периоде. Например,

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad 0,(24) = \frac{24}{99}, \quad 5,(45) = 5 + 0,(45) = 5 + \frac{45}{99} = 5\frac{45}{99} = 5\frac{5}{11} = \frac{60}{11} \text{ и т. д.}$$

- 2) если дробь смешанная периодическая, то она равна обыкновенной, у которой числитель равен разности числа, составленного из цифр, стоящих после запятой и числа, составленного из цифр, стоящих между запятой и периодом, а знаменатель содержит столько девяток, сколько цифр в периоде и столько нулей, сколько цифр между запятой и периодом.

Например,

$$0,5(6) = \frac{56 - 5}{90} = \frac{51}{90}, \quad 0,22(9) = \frac{229 - 22}{900} = \frac{207}{900} = \frac{23}{100} = 0,23$$

$$2,56(523) = 2 + 0,56(523) = 2 + \frac{56523 - 56}{99900} = 2 + \frac{56467}{99900} = 2\frac{56467}{99900} = \frac{256267}{99900}, \text{ и т. д.}$$

1.1.5. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Взаимно обратные числа. Изображение чисел на числовой прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

Как было указано выше всякая бесконечная периодическая дробь есть некоторое рациональное число. Однако кроме таких дробей существуют непериодические. Они соответствуют числам, которые называются *иррациональными*. Например, $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{7}$ и т. д. Рациональные и иррациональные числа составляют множество *действительных чисел*, которое обозначается R . Таким образом, любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью и, наоборот, каждая такая дробь является представлением вполне определённого действительного числа.

Для геометрического изображения действительных чисел пользуются

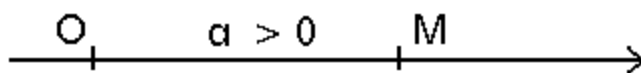


Рис.1.

прямой. Возьмём произвольную прямую. Она имеет два противоположных направления. Одно из них считается положительным. Такая прямая называется *осью*. Положительное направление на оси обозначается стрелкой. Выберем линейную единицу для измерения длин и какую-нибудь точку O на оси. Пусть a - положительное действительное число. Тогда ему будет соответствовать точка M на этой оси, находящаяся от точки O на расстоянии a с положительной стороны и $-a$ с отрицательной стороны (рис. 1). Точка M и является геометрическим изображением числа a . Ось, служащая для изображения чисел, называется *числовой осью*. Обратно, всякой точке числовой оси соответствует некоторое действительное число. Множество действительных чисел обозначается буквой R .

Для рассматриваемых чисел справедливы вложения $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$.

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$.

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки O (рис. 2).

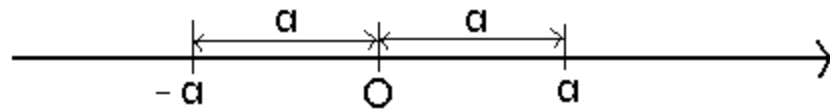


Рис. 2.

Основные свойства модулей:

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| = |-a|$;
- 3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- 4) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;
- 5) $|a|^2 = a^2$;
- 6) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 7) $|a - b| \geq |a| - |b|$.

1.1.6. Степень с натуральным и целым показателями. Свойства степеней с натуральным и целым показателями.

Пусть a - действительное число, а n - натуральное число, большее единицы, n - й степенью числа a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a , т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

Если $n=1$, то полагают $a^1 = a$. Число a - *основание степени*, n - *показатель степени*.

1.1.6.1. Свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, если $n > m$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

Положим $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0, n \in N$. Выражение 0^{-1} и вообще нуль в отрицательной степени считается выражением, не имеющим смысла.

Кроме того $a^0 = 1$, для $a \neq 0$, и $0^m = 1$. Выражение 0^0 считается неопределённым.

Таким образом, определена степень с целым показателем $a^m, m \in Z$.

1.1.6.2. Свойства степени с целым показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, для любых $n, m \in Z$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, для любых $n, m \in Z$.
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется *значением выражения*.

1.1.7. Корень n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$), его свойства для четного и нечетного значений числа n . Арифметический корень. Свойства арифметических корней.

Если $a \geq 0$ и n - натуральное число, большее 1, то существует (и только одно) неотрицательное число x , такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называется *арифметическим корнем n -ой степени* из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным числом*, n - *показателем корня*. Если $n = 2$, то обычно пишут $\sqrt{a}$ (опуская показатель корня) и называют это выражение *квадратным корнем*. Часто вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Итак, согласно определению запись $\sqrt[n]{a} = x$, где $a \geq 0$, означает, во-первых, что $x \geq 0$ и, во-вторых, что $x^n = a$, т. е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то справедливы следующие свойства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$.
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.
5. $\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}$.
6. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, если n - чётное число.
7. $\sqrt[n]{a^n} = a$, если n - нечётное число.
8. $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}, a \geq 0, b \geq 0$.

Причём первое свойство распространяется на произведение любого числа множителей.

Пусть $a < 0$, а n - натуральное число, большее 1. Если n - чётное число, то равенство $x^n = a$ не выполняется ни при каком действительном значении x . Это значит, что в области действительных чисел нельзя определить корень чётной степени из отрицательного числа. Если же n - нечётное число, то существует одно и только одно действительное число x , такое, что $x^n = a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют *корнем нечётной степени n из отрицательного числа a* .

В случае нечётных показателей корней, свойства радикалов, справедливые для неотрицательных значений подкоренных выражений, верны и для отрицательных значений подкоренных выражений.

1.1.8. Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем.

Определим для $a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Так как $\frac{m}{n}$ является рациональным числом, то тем самым определяется степень с любым рациональным показателем.

1.1.8.1. Свойства степени с рациональным показателем.

Для любых рациональных чисел $\frac{p}{q}, \frac{m}{n}$ и числа $a > 0$ справедливы свойства:

$$1. \quad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}}.$$

$$2. \quad \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}.$$

$$3. \quad \left(a^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p \cdot m}{q \cdot n}}.$$

$$4. \quad a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}.$$

$$5. \quad \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{p}{q}}, b \neq 0.$$

1.1.9. Степень с действительным показателем.

Пусть x - иррациональное число, a - положительное действительное число.

Если $a = 1$, то полагают $1^x = 1$.

Пусть $a > 1$. Рассмотрим любое рациональное число $r_1 < x$ и любое рациональное число $r_2 > x$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$. В этом случае под a^x понимают такое число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 , таких, что $r_1 < x$ и $r_2 > x$. В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого $a > 1$ и любого иррационального x .

Если $0 < a < 1$, то рассмотрим любое рациональное число $r_1 < x$ и любое рациональное число $r_2 > x$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$. В этом случае под a^x понимают такое число, которое заключено между a^{r_2} и a^{r_1} для любых

рациональных чисел r_1 и r_2 , таких, что $r_1 < x < r_2$. В математике доказано, что такое число существует и единственно для любого $0 < a < 1$ и любого иррационального x .

1.1.9.1. Свойства степени с действительным показателем.

Если $a > 0, b > 0$ и x, y - любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $a^x : a^y = a^{x-y}$.
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
4. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

1.2. Алгебраические выражения.

Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня, с помощью скобок составляются *алгебраические выражения*.

Примеры алгебраических выражений:

- 1) $2a^2b - 3ab^2(a + b)$; 2) $a + b + \frac{c}{5}$; 3) $\frac{3a^2 + 3a + 1}{a - 1}$;
 4) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c}{3}\right)^3$; 5) $\sqrt{a + b}$; 6) $(\sqrt[3]{2} - x)^4$; 7) $a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$.

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то оно называется *целым*. Из примеров, целыми являются выражения 1), 2) и 6).

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причём используется деление на выражения с переменными, то оно называется *дробным*. В приведённых примерах, такими являются выражения 3) и 4).

Целые и дробные выражения называются *рациональными выражениями*. Такими являются выражения 1), 2), 3), 4) и 6).

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то такое алгебраическое выражение называется *иррациональным*. Так, иррациональными являются выражения 5) и 7).

Итак, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, разделяются на целые и дробные.

Определение. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*.

Множество всех допустимых значений переменных называют *областью определения алгебраического выражения*.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Дробные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают знаменатель в нуль. Иррациональные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают в отрицательное число выражение, содержащееся под знаком корня чётной степени или под знаком возведения в дробную степень.

Определение. Если в алгебраическом выражении переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение называется *значением алгебраического выражения* при выбранных значениях переменных.

Если соответственные значения двух выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называются *тождественно равными*.

Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Преобразование алгебраических выражений может осуществляться с помощью следующих тождеств:

$$1. (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

$$2. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$3. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$4. a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2).$$

$$5. a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

$$6. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$7. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$8. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$9. (a + b + c + \dots + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + z^2 + 2ab + 2ac + \dots + 2yz.$$

Эти тождества называют *формулами сокращённого умножения*.

Коэффициенты разложения сумм двух переменных более высоких степеней можно вычислить с помощью треугольника Паскаля:

$n = 0$						1					
$n = 1$						1		1			
$n = 2$					1		2		1		
$n = 3$				1		3		3		1	
$n = 4$			1		4		6		4	1	
$n = 5$		1		5		10		10		5	1

$n = 6$					1				6					15				20					15				6				1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											</
---------	--	--	--	--	---	--	--	--	---	--	--	--	--	----	--	--	--	----	--	--	--	--	----	--	--	--	---	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

1.2.1. Одночлен и многочлен. Действия над многочленами. Тождественные преобразования многочленов.

Одночленом называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными. Например, $3a \cdot (2,5a^3)$, $(5ab^2) \cdot (0,4c^3d)$, $x^2y(-2z) \cdot \frac{3}{4}$ - одночлены, тогда как выражения $a + b$, $\frac{ab}{c}$, не являются одночленами.

Любой одночлен можно привести к *стандартному виду*, т. е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*. Сумму показателей всех переменных называют *степенью одночлена*.

Одночлены, приведённые к стандартному виду, называются *подобными*, если они отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются. Подобные одночлены можно складывать и вычитать. В результате снова получается одночлен, подобный исходным (иногда получается 0). Сложение и вычитание подобных многочленов называют *приведением подобных членов*.

Многочленом называют сумму одночленов. Если все члены записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных членов, то получится *многочлен стандартного вида*.

Приведение многочлена к стандартному виду является *тождественным преобразованием* многочлена.

Всякое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида. В некоторых случаях приведение целого выражения к стандартному виду многочлена осуществляется с использованием тождеств сокращённого умножения.

1.2.2. Алгебраические дроби. Основные свойства дробей. Действия над алгебраическими дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений.

Алгебраической дробью называется выражение вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q - алгебраические выражения, причём Q содержит переменные. Если P и Q - рациональные выражения, то дробь $\frac{P}{Q}$ называется *рациональной*.

Основное свойство дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot R}$, где $R \neq 0$ и $Q \neq 0$. Т. е. числитель и знаменатель алгебраической дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен.

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на -1 , получим $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q}$. Таким образом, значение дроби не изменится, если одновременно изменить знак у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак:

$$\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q}; \quad \frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}.$$

Значит:

$$\frac{P}{Q} = \frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q}.$$

Из основного свойства дроби следует, что числитель и знаменатель можно разделить на общий множитель, т. е. сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби путём сокращения невозможно.

Так же как числовую, алгебраическую дробь можно приводить к общему знаменателю. *Общим знаменателем* нескольких рациональных дробей называется целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби. Чтобы алгебраическую дробь привести к общему знаменателю, нужно:

- 1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;
- 2) составить общий знаменатель, включив в него в качестве сомножителей все множители знаменателей дробей; если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берётся с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;
- 3) найти дополнительные множители для каждой из дробей (для этого общий множитель делится на знаменатель дроби);
- 4) помножив числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель, привести дроби к общему знаменателю.

Сумма или разность двух (и вообще любого конечного числа) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме или разности числителей складываемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q} \pm \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 \pm P_2}{Q}.$$

Произведение двух (и вообще любого конечного числа) алгебраических дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Частное от деления двух алгебраических дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель – произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2}{Q_1 \cdot P_2}.$$

Чтобы возвести алгебраическую дробь $\frac{P}{Q}$ в натуральную степень n , нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби;

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

При возведении дроби в целую отрицательную степень, используется тождество $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$, справедливое при всех значения переменных, при которых $P \neq 0$, $Q \neq 0$.

Тождественное преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в натуральную степень. Всякое рациональное выражение можно преобразовать в дробь, числитель и знаменатель которой – целые рациональные выражения.

1.2.3. Формулы сложного радикала.

Если $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\sqrt{a + \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \\ \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.\end{aligned}$$

2. Рациональные уравнения.

2.1. Понятие уравнения с одной переменной. Линейные уравнения.

Равенство с переменной $f(x) = g(x)$ называется *уравнением с одной переменной* x . Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения*. Решить уравнение - значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

В процессе решения уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному.

Если каждый корень одного уравнения является одновременно и корнем второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Равносильность уравнений означает, что каждое из них является следствием другого. При решении уравнения часто приходится применять такие преобразования, которые приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но, кроме них, уравнение-следствие может иметь и такие решения, которые не являются корнями исходного уравнения, это так называемые *посторонние корни*. Чтобы выявить и отсеять посторонние корни, обычно все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение. Проверка является неотъемлемой частью решения.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x , при которых и выражение $f(x)$, и выражение $g(x)$ имеют смысл.

Корни уравнения $f(x) = g(x)$ должны принадлежать его области определения. Но иногда бывает так, что в процессе преобразования его область определения меняется (обычно она расширяется) и из найденных в итоге всех преобразований значений переменной одни значения принадлежат области определения уравнения $f(x) = g(x)$, а другие не принадлежат. Тогда первые являются корнями уравнения, а вторые - нет (посторонние корни).

Таким образом, посторонние корни можно выявить подстановкой в исходное уравнение или с помощью области определения исходного уравнения.

Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax = b$, где a и b - действительные числа; a называют *коэффициентом при переменной*, b - *свободным членом*. Для линейного уравнения $ax = b$ могут представиться три случая:

- 1) $a \neq 0$; в этом случае корнем уравнения является $x = \frac{b}{a}$;
- 2) $a = 0, b = 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x , т.е. корнем уравнения является любое действительное число;
- 3) $a = 0, b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, которое не имеет корней.

2.2. Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — действительные числа, причём $a \neq 0$, называют *квадратным уравнением*. Если $a=1$, то квадратное уравнение называют *приведённым*, если $a \neq 1$, то *не приведённым*. Числа a, b называются соответственно *первым* и *вторым коэффициентами* уравнения, c — *свободным коэффициентом*.

Квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Или $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Эта запись называется *формулой корней квадратного уравнения*.

2) если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.

3) если $D < 0$, то $\sqrt{D}$ не существует и уравнение не имеет решений.

Таким образом, в зависимости от дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$).

2.2.1. Приведённое квадратное уравнение.

Рассмотрим уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Дискриминант этого уравнения $D = p^2 - 4q$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \quad \text{или}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2.2.2. Теорема Виета (прямая и обратная).

В ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формул позволяет теорема Виета.

Теорема. Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$, т. е.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Используя теорему Виета, можно выразить сумму и произведение корней приведенного квадратного уравнения через его коэффициенты. Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{1} = q.$$

Обратная теорема Виета:

Теорема. Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

2.3. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.

Квадратным трёхчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x - переменная, a, b, c - некоторые числа, причём $a \neq 0$. *Корнем квадратного трёхчлена* называется значение переменной, при котором значение этого трёхчлена равно нулю.

Для того, чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Так как квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет те же корни, что и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то он может, как и квадратное уравнение, иметь два корня, один корень или не иметь корней. Это зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена*. Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два разных корня, если $D = 0$, то один корень, а если $D < 0$, то не имеет корней. В случае $D = 0$ будем считать, что квадратный трёхчлен имеет два равных корня

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Теорема 1. Если x_1 и x_2 - корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Теорема 2. Если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

2.4. Биквадратное уравнение. Решение биквадратных уравнений.

Биквадратным называют уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где a, b, c - действительные числа, причём $a \neq 0$. Это уравнение сводится к квадратному путём введения новой переменной $y = x^2$.

2.5. Решение рациональных уравнений в общем случае.

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ - некоторые числа, называется *рациональным*. В случае, когда $n = 1$ или $n = 2$, получаем линейное и, соответственно, квадратное уравнения. Если $n \geq 3$, то рациональное уравнение решается разложением на множители многочлена

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Это осуществляется либо методом группировки, либо с помощью следующего утверждения.

Теорема Безу. Если $c_1, c_2, \dots, c_k$ - корни многочлена $P_n(x)$, то многочлен $P_n(x)$ делится на произведение $(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \dots \cdot (x - c_k)$.

Из теоремы Безу следует, что для разложения на множители многочлена $P_n(x)$ достаточно найти некоторые его корни.

Если коэффициенты уравнения являются целыми числами, то корни можно подобрать исходя из их вида.

Теорема о целых корнях. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

является делителем свободного члена a_0 .

Из теоремы следует, что при поиске целых корней многочлена с целыми коэффициентами достаточно проверить все делители свободного члена.

Теорема о дробных корнях. Если многочлен $P_n(x)$ имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то числитель p является делителем свободного члена a_0 , а знаменатель q - делителем коэффициента a_n при старшей степени x .

Пример 1. Решить уравнение

$$3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 50 = 0.$$

Решение. Проверим уравнение на существование целых корней. Для этого найдём все делители свободного коэффициента, т. е. числа 50. Это $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50$. Подставляя поочерёдно эти значения вместо переменной x в наше уравнение, находим первый корень $x_1 = 2$. По теореме Безу левая часть имеет множитель $x - 2$. Разделив многочлен $3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 50$ на $x - 2$ (например уголком), получаем

$$3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 50 = (x - 2) \cdot (3x^3 + 11x^2 + 25x + 25)$$

Рассматривая теперь уравнение $3x^3 + 11x^2 + 25x + 25 = 0$, и проверяя делители числа 25, убеждаемся в том, что целых корней больше нет. По теореме о дробных корнях проверяем всевозможные дроби, в которых знаменатель - делитель коэффициента при x^3 , т. е. числа 3, числитель - делитель числа 25.

Это $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{25}{3}$. Проверкой убеждаемся, что $x_2 = -\frac{5}{3}$ - корень нашего

уравнения. По теореме Безу выражение $3x^3 + 11x^2 + 25x + 25$ делится на $x + \frac{5}{3}$.

Выполнив деление, получаем

$$3x^3 + 11x^2 + 25x + 25 = \left(x + \frac{5}{3}\right) \cdot (3x^2 + 6x + 15) = 0.$$

Решая квадратное уравнение $3x^2 + 6x + 15 = 0$, находим остальные корни

$$x_3 = 1 - \sqrt{2}, x_4 = 1 + \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{3}, x_3 = 1 - \sqrt{2}, x_4 = 1 + \sqrt{2}$.

В некоторых случаях удаётся понизить степень уравнения с помощью подстановок.

Пример 2. Решить уравнение $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.

Решение. Разделим уравнение на $x^2 \neq 0$. Получим

$$2x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Сделаем замену $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$. В результате

получим уравнение $2(y^2 - 2) + y - 6 = 0$ или $2y^2 + y - 10 = 0$. Решая которое,

находим $y_1 = 2, y_2 = -\frac{5}{2}$. Отсюда $x + \frac{1}{x} = 2$, $x_1 = x_2 = 1$. Приравняв $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$,

получим $x_3 = -2, x_4 = -\frac{1}{2}$.

2.6. Текстовые задачи. Проценты.

Текстовые задачи сводятся к решению уравнений или систем уравнений.

Один процент от некоторой величины это $\frac{1}{100}$ её часть. Чтобы найти $y\%$ от

некоторого числа x нужно это число умножить на $\frac{y}{100}$, т. е. это - $\frac{x \cdot y}{100}$.

$x \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right)$ - величина x увеличивается на $y\%$.

$x \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right)$ - величина x уменьшается на $y\%$.

3. Рациональные неравенства.

3.1. Свойства числовых неравенств.

Определение. Число a называется *большим* числа b если существует такое положительное число c , что $a = b + c$. Число a называется *меньшим* числа b если существует такое отрицательное число c , что $a = b + c$.

Пусть a и b - некоторые числа, причём a больше b . Тогда точка с координатой a лежит на числовой прямой правее точки с координатой b . Перемещению по числовой прямой вправо от точки b соответствует прибавление к числу b положительного числа (рис. 1).

Отсюда следует, что $a - b = c$. Итак, если a больше b , то разность $a - b$ есть число положительное.

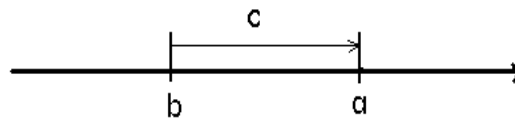


Рис.1.

Допустим теперь обратное: разность $a - b$ равна положительному числу c . А, так как $a - b = c$, то $a = b + c$. Но прибавление к числу b положительного числа соответствует передвижению от точки с координатой b вправо по числовой прямой, значит, точка с координатой a лежит правее точки с координатой b , т.е. a больше b .

Аналогично можно показать, что если a меньше b , то разность $a - b$ отрицательна, и наоборот, если разность $a - b$ отрицательна, то a меньше b . Итак, если число a больше числа b ($a > b$), то разность $a - b$ - положительное число; если же разность $a - b$ - отрицательное число, то число a меньше числа b ($a < b$).

Согласно этому определению любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из отношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

С геометрической точки зрения неравенство $a > b$ ($a < b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой правее (левее) точки b .

Знаки $>$, $<$ называются *знаками строгих неравенств*; знаки $\geq$, $\leq$ - *знаками нестрогих неравенств*. Запись $a \leq b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b , или число a равно числу b .

Следующая теорема отражает основные свойства числовых неравенств.

Теорема. Для действительных чисел a, b, c, d справедливы следующие условия:

- 1) если $a > b$, то $b < a$;
- 2) если $a > b$, $b > c$, то $a > c$;
- 3) если $a > b$, то $a + c > b + c$;
- 4) если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$;

5) если $a > b$ и c - положительное число, то $ac > bc$, если же c - отрицательное число, то $ac < bc$;

6) если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d - положительные числа, то $ac > bd$;

7) если $a > b$ и a, b - положительные числа, то $a^n > b^n$ для любого натурального числа n ;

8) если $a > b$ и a, b - положительные числа, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ для любого натурального числа n .

3.2. Неравенства с одной переменной. Решение линейных неравенств

$ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b, b < ax < c$.

3.2.1. Неравенства с одной переменной.

Неравенством с одной переменной x называют выражение вида

$$f(x) > g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые алгебраические выражения с одной переменной x . При этом $f(x)$ считают левой частью неравенства, а $g(x)$ - правой. Можно рассматривать и другие неравенства с переменной x : $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \neq g(x)$.

Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство, называется *решением неравенства*. Решить неравенство с переменной - значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Областью определения неравенства $f(x) > g(x)$ (или областью допустимых значений неравенства - ОДЗ) называют общую часть областей определения выражений $f(x)$ и $g(x)$.

Два неравенства с одной переменной называются *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

При решении неравенств обычно заменяют данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному; полученное неравенство снова заменяют более простым, равносильным данному неравенством и т.д. Такие замены осуществляются на основе свойств числовых неравенств.

3.2.2. Линейные неравенства.

3.2.2.1. Решение неравенства вида $ax > b$.

Линейным называется неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$). Если $a > 0$, то неравенство $ax > b$ по свойству 4) числовых неравенств равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ по тому же свойству числовых неравенств равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$, значит, множество решений есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$. Оно не имеет решений, если $b \geq 0$, и верно при любых x , если $b < 0$.

3.2.2.2. Решение неравенства вида $ax < b$.

Если $a > 0$, то неравенство $ax < b$ по свойству 4) числовых неравенств равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax < b$ по тому же свойству числовых неравенств равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$, значит, множество решений есть промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x < b$. Оно не имеет решений, если $b \leq 0$, и верно при любых x , если $b > 0$.

3.2.2.3. Решение неравенства вида $ax \geq b$.

Если $a > 0$, то неравенство $ax \geq b$ по свойству 4) числовых неравенств равносильно неравенству $x \geq \frac{b}{a}$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax \geq b$ по тому же свойству числовых неравенств равносильно неравенству $x \leq \frac{b}{a}$, значит, множество решений есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x \geq b$. Оно не имеет решений, если $b > 0$, и верно при любых x , если $b \leq 0$.

3.2.2.4. Решение неравенства вида $ax \leq b$.

Если $a > 0$, то неравенство $ax \leq b$ по свойству 4) числовых неравенств равносильно неравенству $x \leq \frac{b}{a}$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax \leq b$ по тому же свойству числовых неравенств равносильно неравенству $x \geq \frac{b}{a}$, значит, множество решений есть промежуток $\left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x \leq b$. Оно не имеет решений, если $b < 0$, и верно при любых x , если $b \geq 0$.

3.2.2.5. Решение неравенства вида $b < ax < c$.

Если $a > 0$, то неравенство $b < ax < c$ по свойству 4) числовых неравенств равносильно неравенству $\frac{b}{a} < x < \frac{c}{a}$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left[\frac{b}{a}; \frac{c}{a}\right]$.

Если $a < 0$, то неравенство $b < ax < c$ по тому же свойству числовых неравенств равносильно неравенству $\frac{b}{a} > x > \frac{c}{a}$, значит, множество решений есть промежуток $\left[\frac{c}{a}; \frac{b}{a}\right]$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $b < 0x < c$. Оно не имеет решений, если $0 < b \leq c$ или, если $b \leq c < 0$ или, если $b \geq c$, и верно при любых x , если $b < 0$ и $c > 0$.

Линейное неравенство можно решать и графически. Рассмотрим, например, неравенство $ax > b$. Строим в системе координат графики функций $y = ax$ и $y = b$

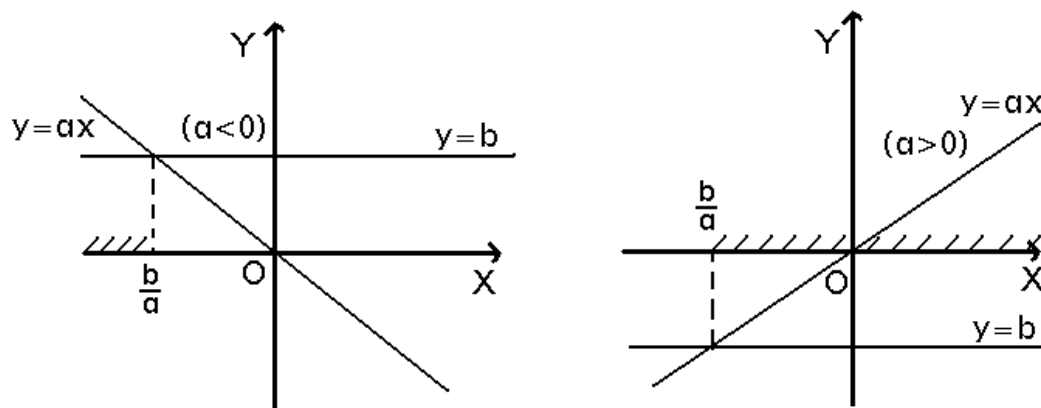


Рис.2.

(рис. 2). $y = b$

Выбираем на оси абсцисс те промежутки, где график функции $y = ax$ выше графика $y = b$. Из рис. 2 нетрудно заметить, что при $a < 0$ неравенство $ax > b$ имеет решениями промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$, а при $a > 0$ - промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

3.2.3. Квадратичное неравенство. Решение квадратичных неравенств.

Квадратичным называется неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

(или соответственно $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), где $a \neq 0$.

При решении неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ используют свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. В этом случае применяют следующий алгоритм:

- 1) находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни;
- 2) если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси OX и через отмеченные точки схематически проводят параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$, если трёхчлен не имеет корней, то схематично изображают параболу, расположенную выше оси OX при $a > 0$ и ниже оси OX при $a < 0$;
- 3) находят на оси OX промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси OX (если решается неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси OX (если решается неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Возможны шесть положений параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси OX . Они представлены на рис. 3 - 8.

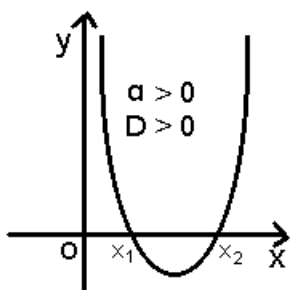


Рис. 3.

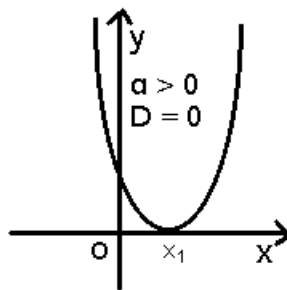


Рис. 4.

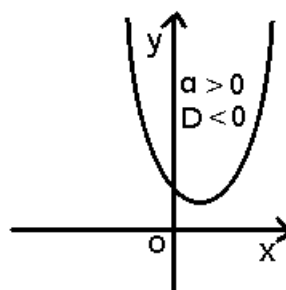


Рис. 5.

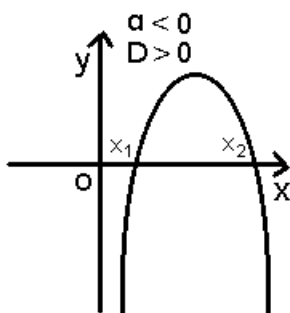


Рис. 6.

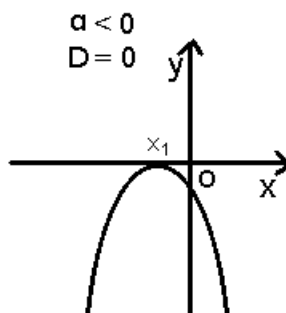


Рис. 7.

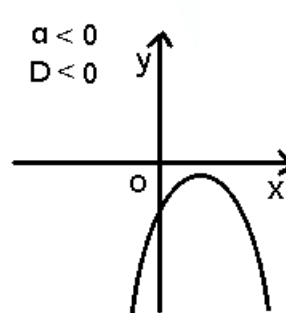


Рис. 8.

Опираясь на эти графические иллюстрации можно решать остальные виды квадратных неравенств.

Например, при решении неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$ при $a < 0$, возможны следующие случаи:

- 1) если $D > 0$ (рис. 6), то $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$;
- 2) если $D = 0$ (рис. 7), то $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 3) если $D < 0$ (рис. 8), то $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Тригонометрия.

4.1. Основные свойства тригонометрических функций.

1. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; 2. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; 3. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; 4. $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;
5. $|\sin \alpha| \leq 1$; 5. $|\cos \alpha| \leq 1$; 6. $\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin \alpha$; 7. $\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos \alpha$;
8. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha$; 9. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$.

4.2. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.
2. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.
3. $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$.
4. $\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$.

4.3. Значения тригонометрических функций некоторых острых углов.

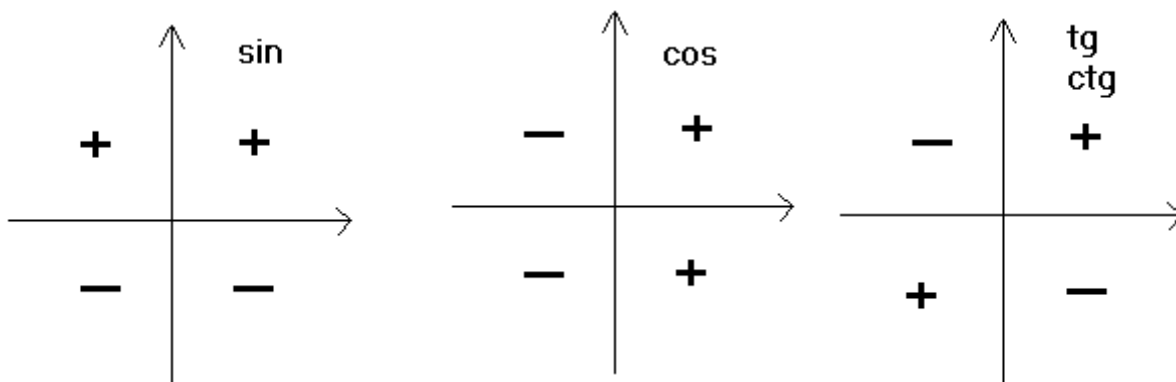
Функция	x				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4.4. Значения некоторых других углов.

1. $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$; 2. $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; 3. $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$;
4. $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$; 5. $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$; 6. $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$.

4.5. Формулы приведения.

Таблицы знаков тригонометрических функций по четвертям:



Значения тригонометрических функций углов, больших 90° определяются с помощью следующих правил:

1. Если в формуле приведения острый угол α прибавляется к углам $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ или вычитается из них, то функция меняет своё название на кофункцию. Знак берётся тот, который имеет первоначальная функция в четверти всего угла.

2. Если в формуле приведения острый угол α прибавляется к углам π или 2π , или вычитается из них, то функция не меняет своего названия. Знак определяется аналогично правилу 1.

В результате применения этих формул можно составить следующую таблицу:

Функция	x								
	α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin x$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

4.6. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$;

2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$;

3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$;

4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$;

5. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$; 6. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$;

7. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$; 8. $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$.

4.7. Тригонометрические функции двойных углов.

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$;
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$; 4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.

4.8. Тригонометрические функции тройных углов.

1. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$; 2. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$;
3. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$; 4. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$.

4.9. Тригонометрические функции четырёхкратных углов.

1. $\sin 4\alpha = \cos \alpha \cdot (4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha)$; 2. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$;
3. $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$; 4. $\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha}$.

4.10. Тригонометрические функции половинных углов.

1. $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$; 2. $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$;
3. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$;
4. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$.

4.11. Формулы понижения степени.

1. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$; 2. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.; 3. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, 4. $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

4.12. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла.

1. $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 2. $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 4. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

4.13. Суммы и разности тригонометрических функций.

$$\begin{aligned}
 1. \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & 2. \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\
 3. \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & 4. \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\
 5. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; & 6. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \\
 7. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}; & 8. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta &= \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.
 \end{aligned}$$

4.14. Произведения тригонометрических функций.

$$\begin{aligned}
 1. \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)); \\
 2. \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)); \\
 3. \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).
 \end{aligned}$$

4.15. Некоторые другие формулы:

$$\begin{aligned}
 1. (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 &= 1 \pm \sin 2\alpha; & 2. \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta); \\
 2. \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta &= \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha) = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha; \\
 3. \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta &= \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha; \\
 4. \sin \alpha \pm \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right).
 \end{aligned}$$

4.16. Обратные тригонометрические функции.

$$1. \arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = a, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]; \sin(\arcsin a) = a.$$

$$\text{Если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin(\sin \alpha) = \alpha.$$

$$2. \arccos a = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = a, \alpha \in [0; \pi]; \cos(\arccos a) = a.$$

$$\text{Если } \alpha \in [0; \pi], \text{ то } \arccos(\cos \alpha) = \alpha.$$

$$3. \operatorname{arctg} a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = a, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right); \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

$$\text{Если } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha.$$

$$4. \operatorname{arcctg} a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = a, \alpha \in (0; \pi); \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a.$$

$$\text{Если } \alpha \in (0; \pi), \text{ то } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha.$$

4.17. Соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;
3. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x \cdot \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y)$;
4. $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x \cdot \sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2} \cdot y)$;
5. $\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$;
6. $\arccos x - \arccos y = \arccos(xy + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$;
7. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; 8. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$;
9. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; 10. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
11. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; 11. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

4.18. Формулы решения тригонометрических уравнений.

1. $\sin x = a$; $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи: $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

2. $\cos x = a$; $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи: $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

3. $\operatorname{tg} x = a$; $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Частный случай: $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Иррациональные уравнения и неравенства. Прогрессии.

5.1. Иррациональные уравнения и неравенства.

5.1.1. Иррациональные уравнения.

Уравнение, содержащее переменную под знаком радикала (корня), называется *иррациональным*.

Для решения иррациональных уравнений в простейших случаях могут быть использованы: метод приведения к смешанной системе уравнений и неравенств, метод замены переменной, метод возведения обеих частей в некоторую степень.

Иррациональное уравнение с корнем чётной степени $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, $n \in \mathbb{N}$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Это значит, чтобы решить исходное уравнение, необходимо найти корни уравнения $f(x) = (g(x))^{2n}$ и проверить, удовлетворяют ли они условию $g(x) \geq 0$. В некоторых случаях целесообразно начинать с проверки выполнения этих условий.

Иррациональное уравнение с корнем нечётной степени $\sqrt[n]{f(x)} = g(x), n \in \mathbb{N}$ равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2n-1}$. Рассмотрим схемы решения иррациональных уравнений других видов.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}.$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0.$$

Это уравнение решается составлением совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ \begin{cases} g(x) > 0. \\ f(x) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$$

Решение данного уравнения осуществляется с помощью системы

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = h^2(x) \end{cases}$$

Затем уравнение сводится к одному из перечисленных выше видов.

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = h(x)$$

Данное уравнение преобразуется сначала к виду

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + h(x),$$

затем составляется система

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \sqrt{g(x)} + h(x) \geq 0 \\ f(x) = (\sqrt{g(x)} + h(x))^2. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ решается составлением равносильной системы

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = h(x) \end{cases} .$$

Уравнение $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ преобразовывается к уравнению $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)}$, которое имеет только что рассмотренный вид.

Метод возведения в степень состоит в том, что, оставляя некоторый радикал в одной части уравнения, возводят обе части уравнения в соответствующую степень. Так продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, не содержащее радикалов. Так как при этом могут появиться посторонние корни, то необходимо сделать проверку найденных корней. Проверка обязательна и при введении новой переменной в методе подстановки.

5.1.2. Иррациональные неравенства.

Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} .$

Неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности систем $\begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{cases} .$

Неравенство $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < \sqrt{h(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} < h(x) - g(x) - f(x) \end{cases} .$$

Неравенство $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} < h^2(x) - f(x) - g(x) \end{cases} .$$

Неравенство $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x)$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} \begin{cases} h(x) < 0 \\ \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} > h^2(x) - f(x) - g(x) \end{cases} \end{cases} .$$

5.2. Прогрессии.

5.2.1. Числовые последовательности.

Числовой последовательностью, или *последовательностью*, называют числовую функцию $x_n = f(n)$, определённую на множестве всех натуральных чисел ($n \in N$).

Числовую последовательность называют *конечной*, если она определена на конечном подмножестве натуральных чисел: $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, m$, и *бесконечной*, если она определена на бесконечном подмножестве всех натуральных чисел: $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, m, \dots$. Числа

$x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \dots, x_n = f(n), \dots$, называются, соответственно, первым, вторым, третьим, ..., n -м, ... членами *последовательности*, а сами значения аргументов — $n = 1, 2, 3, \dots, m, \dots$, — *номера*ми членов *последовательности*. Член x_n называют *общим членом последовательности*.

Пример. Если $x_n = n^2$, то $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9, \dots$.

Последовательность называют *возрастающей*, если всегда $x_{n+1} > x_n$, и *убывающей*, если $x_{n+1} < x_n$, для любого натурального числа n .

Последовательность называют *неубывающей*, если $x_{n+1} \geq x_n$, и *невозрастающей*, если $x_{n+1} \leq x_n$. Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое число A , что $x_n \leq A$, для любого номера n .

Последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое число A , что $x_n \geq A$, для любого номера n . Ограниченные сверху и снизу последовательности, называются просто *ограниченными*. Например, последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) является ограниченной, так как $0 < x_n \leq 1$.

5.2.2. Арифметическая прогрессия. Формулы n -го члена и суммы первых n членов.

Последовательность (a_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d , называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью* прогрессии.

Примеры:

2, 5, 8, 11, ..., $a_1 = 2$, $d = 3$;

-9, -1, 7, 15, ..., $a_1 = -9$, $d = 8$;

4, 4, 4, ... , $a_1 = 4$, $d = 0$, и т. д.

По определению прогрессии:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$

..... ,

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + d(n-1).$$

В итоге мы получаем

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - формулу n -го члена арифметической прогрессии.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ - формулы суммы n -первых членов арифметической прогрессии ($S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$).

Для любых трех последовательных членов a_{n-1}, a_n, a_{n+1} арифметической прогрессии справедлива формула

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

В общем случае $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-2} + a_{n+2}}{2} = \frac{a_{n-3} + a_{n+3}}{2} = \dots = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$. Это означает, например, что $a_{10} = \frac{a_9 + a_{11}}{2} = \frac{a_8 + a_{12}}{2} = \frac{a_7 + a_{13}}{2} = \dots = \frac{a_1 + a_{19}}{2}$.

5.2.3. Геометрическая прогрессия. Формулы n -го члена и суммы первых n членов. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Последовательность (b_n) , первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q , называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем прогрессии*.

По определению прогрессии:

$$b_2 = b_1 q,$$

$$b_3 = b_2 q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$

..... ,

$$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

В итоге мы получаем $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ - формулу n -го члена геометрической прогрессии.

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ - формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии ($S_1 = b_1, S_2 = b_1 + b_2, \dots, S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$).

Для любых трёх последовательных членов геометрической прогрессии $\dots b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \dots$ справедливо равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

В общем случае $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_{n-2} \cdot b_{n+2} = b_{n-3} \cdot b_{n+3} = \dots = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$. Это означает, например, что $b_{10}^2 = b_9 \cdot b_{11} = b_8 \cdot b_{12} = b_7 \cdot b_{13} = \dots = b_1 \cdot b_{19}$.

Геометрическая прогрессия называется *убывающей*, если $|q| < 1$. Например, прогрессия $\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \dots$ является убывающей, так как $q = \frac{2}{3} < 1$.

$S = \frac{b_1}{1-q}$ - формула суммы всех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

6. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

6.1. Определение и свойства функции $y = a^x$ (где $a > 0, a \neq 1$) и её график.

Функцию, заданную формулой $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) называют *показательной*. Свойства показательной функции.

1. Функция $y = a^x$ определена на всей числовой оси. $D(x) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция $y = a^x$ принимает только положительные значения. $E(y) = (0; +\infty)$. Действительно, любая степень положительного числа есть число положительное.
3. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$. Это означает, что график функции $y = a^x$ ($a > 1$) расположен выше прямой $y = 1$ при $x > 0$ и ниже её при $x < 0$.
4. Если $0 < a < 1$, то $a^x < 1$ при $x > 0$ и $a^x > 1$ при $x < 0$. Т. е. график функции $y = a^x$ ($0 < a < 1$) расположен выше прямой $y = 1$ при $x < 0$ и ниже её при $x > 0$.
5. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ - убывающей.
6. Каково бы ни было положительное число $y = b$, существует такое число $x = x_0$, что $a^{x_0} = b$. Геометрически оно означает, что при любом положительном значении $y = b$ график функции $y = a^x$ пересекает прямую $y = b$, причём только в одной точке.
7. Если x неограниченно возрастает $x \rightarrow +\infty$, то a^x при $a > 1$ также неограниченно возрастает $a^x \rightarrow +\infty$. Если x неограниченно убывает $x \rightarrow -\infty$, то a^x принимает сколь угодно малые положительные значения $a^x \rightarrow 0$.

В случае $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ неограниченно возрастает

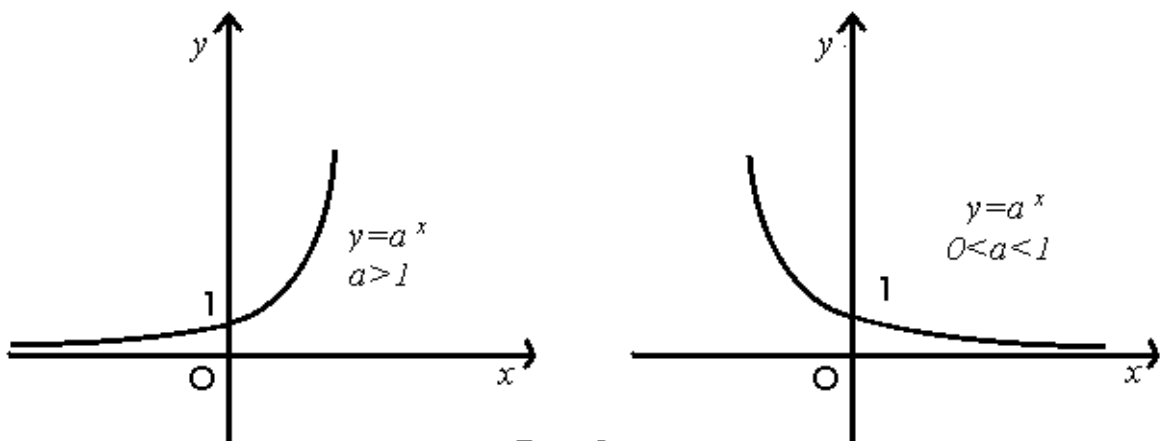


Рис. 3.

$a^x \rightarrow +\infty$ при неограниченном убывании аргумента ($x \rightarrow -\infty$) и принимает сколь угодно малые положительные

значения $a^x \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании аргумента $x \rightarrow +\infty$.

График функции $y = a^x$ изображён на рис. 3.

Показательным называют уравнение, содержащее переменную в показателе степени, т. е. уравнение вида

$$a^{f(x)} = b^{h(x)},$$

где a и b - действительные числа ($a > 0, a \neq 1, b > 0$), $f(x)$ и $h(x)$ - некоторые функции переменной x . Так как $a^{\log_a b} = b$ (основное логарифмическое тождество), то уравнение $a^{f(x)} = b^{h(x)}$ можно привести к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $g(x) = \log_a b \cdot h(x)$.

Решение показательных уравнений основано на следующем утверждении

Теорема. Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Простейшие показательные уравнения получаются при $g(x) = 0, g(x) = c$. Они имеют соответственно вид:

$$a^{f(x)} = 1, a^{f(x)} = a^c.$$

Первое из этих уравнений равносильно уравнению $f(x) = 0$, второе - уравнению $f(x) = c$.

Если задано уравнение

$$a^{f(x)} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq a),$$

то его можно привести к уравнению вида

$$a^{f(x)} = a^c, \text{ где } c = \log_a b.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$f(x) = \log_a b.$$

Показательное уравнение

$$F(a^{f(x)}) = 0,$$

где $a > 0, a \neq 1$, $F(a^{f(x)})$ - заданная функция, решают подстановкой $a^{f(x)} = t$ ($t > 0$). Для t получают уравнение

$$F(t) = 0 \quad (t > 0).$$

Если $t_1, t_2, \dots, t_m$ - корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $t > 0$, то корнями уравнения $F(a^{f(x)}) = 0$ будут все корни уравнения

$$a^{f(x)} = t_k,$$

где $k = 1, 2, \dots, m$, т. е. корни уравнений

$$f(x) = \log_a t_k, k = 1, 2, \dots, m.$$

При решении показательных неравенств, следует помнить, что функция $y = a^{f(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) является возрастающей, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$. Поэтому неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

на пересечении областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$ при $a > 1$ равносильно неравенству

$$f(x) > g(x),$$

а при $0 < a < 1$ - неравенству

$$f(x) < g(x).$$

Таким же образом

$$(h(x))^{f(x)} > (h(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 1; \\ f(x) > g(x); \\ 0 < h(x) < 1; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если решается неравенство вида

$$a^{f(x)} > b \quad (a > 0),$$

то при $b \leq 0$ решением неравенства будет любое $x \in D(f)$; если же $b > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$f(x) > \log_a b,$$

когда $a > 1$, и неравенству

$$f(x) < \log_a b,$$

когда $0 < a < 1$. Если $a = 1$, то получаем числовое неравенство

$$1 < b.$$

Неравенство вида

$$a^{f(x)} < b \quad (a > 0)$$

При $b \leq 0$ решений не имеет, а при $b > 0$ равносильно совокупности систем

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1; \\ f(x) < \log_a b; \\ 0 < a < 1; \\ f(x) > \log_a b. \end{cases}$$

Неравенство вида

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C > 0 \quad (\text{или} < 0)$$

с помощью подстановки $a^{f(x)} = t > 0$ сводится к квадратному неравенству

$$A \cdot t^2 + B \cdot t + C > 0 \quad (\text{или} < 0)$$

и получаем в результате подстановки совокупности

$$\begin{cases} a^{f(x)} > y_1; \\ a^{f(x)} < y_2. \end{cases}$$

или системы неравенств

$$\begin{cases} a^{f(x)} < y_1; \\ a^{f(x)} > y_2. \end{cases}$$

где $y_1 > y_2$ - корни квадратного трёхчлена $A \cdot t^2 + B \cdot t + C$.

6.2. Логарифмы.

6.2.1. Определение логарифма. Логарифм произведения, степени, частного.

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($\log_a b$) называется показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить b .

В записи $b = a^c$ число a является основанием степени, c - показателем, b - степенью. Число c - это показатель степени, в которую надо возвести основание a , чтобы получить число b . Следовательно, c - это логарифм числа b по основанию a :

$$c = \log_a b.$$

Формулы $a^c = b$ и $c = \log_a b$ равносильны, выражают одну и ту же связь между числами a , c и b (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Число c - произвольно.

Равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

называется *основным логарифмическим тождеством*.

Представляя в равенстве $c = \log_a b$ выражение b в виде степени, получим ещё одно тождество

$$\log_a a^x = x.$$

$$\text{Равенства } \begin{cases} \log_a b = c \\ a^c = b \end{cases} \text{ эквивалентны в области действительных чисел: } \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$$

6.2.2. Основные формулы.

$$1. \log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c;$$

$$2. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$3. \log_a b^n = n \cdot \log_a b, \quad \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b, \quad \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b;$$

$$4. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} - \text{формула перехода от одного основания к другому. В}$$

$$\text{частности } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ или } \log_a b \cdot \log_b a = 1, \text{ кроме того } \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a},$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

$$5. a^{\log_a b} = b - \text{основное логарифмическое тождество.}$$

$$6. a^{\log_a b} = b^{\log_a a};$$

$$7. \log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d.$$

$$8. \log_a 1 = \lg 1 = \ln 1 = 0;$$

9. $x = \log_a a^x$ - для любого действительного числа x . Кроме того $\log_a 1 = 0$, для любого основания a .
10. $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$;
11. $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

6.2.3. Десятичные логарифмы. Натуральные логарифмы. Основные свойства.

Если в равенстве $c = \log_a b$ основание a равно 10, то логарифм называется *десятичным* и обозначается $c = \log_{10} b = \lg b$. Если же в равенстве $c = \log_a b$ основание a равно e , где $e \approx 2,718281828 \dots$ - бесконечная непериодическая десятичная дробь, то логарифм называется *натуральным* и обозначается $c = \log_e b = \ln b$. Свойства десятичных и натуральных логарифмов аналогичны свойствам обыкновенных логарифмов и они отличаются лишь формой записи.

Рассмотрим некоторые свойства логарифмов:

1. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю, т. е.
 $\log_a 1 = \lg 1 = \ln 1 = 0$.
2. Если логарифм некоторого числа равен нулю, то это число равно единице, т. е. когда $\log_a b = 0$, то $b = 1$.
3. Если число и основание логарифма равны между собой, то логарифм равен единице, т. е. $\log_a a = 1$. В частности $\lg 10 = 1$, $\ln e = 1$.
4. Если логарифм некоторого числа равен единице, то это число равно основанию логарифма, т. е. если $\log_a b = 1$, то $b = a$.
5. Если два числа имеют один и тот же логарифм при данном основании, то эти числа равны между собой, т. е. из равенства $\log_a b_1 = \log_a b_2$ следует $b_1 = b_2$.
6. Если число и основание логарифма одновременно больше или меньше единицы, то логарифм положителен, т. е. если $0 < a < 1, 0 < b < 1$ (или $a > 1, b > 1$) то $\log_a b > 0$.
7. Если число и основание логарифма расположены по разные стороны от единицы, то логарифм отрицателен, т. е. если $0 < a < 1$ а $b > 1$ или $a > 1$ а $0 < b < 1$, то $\log_a b < 0$.
8. $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$. В частности $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$, $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.
9. Если основание логарифма больше единицы, то большему из двух положительных чисел соответствует больший логарифм, т. е. если $a > 1$ и $0 < b_1 < b_2$, то $\log_a b_1 < \log_a b_2$.

10. Если основание логарифма меньше единицы, то большему из двух положительных чисел соответствует меньший логарифм, т. е. если $0 < a < 1$ и $0 < b_1 < b_2$, то $\log_a b_1 > \log_a b_2$.

Между логарифмами некоторого положительного числа b с двумя разными основаниями a и c существует зависимость, которую можно выразить формулой

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Эту формулу называют *формулой перехода от одного основания к другому*.

В частности из неё следует, что $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, кроме того

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

6.2.4. Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы.

Используя свойства логарифмов, можно представить логарифм некоторого выражения, составленного из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, в виде суммы логарифмов входящих в него чисел.

Такое преобразование называют *логарифмированием*.

Пример 1. Прологарифмировать выражение по основанию a ($a > 0, a \neq 1$).

$$X = \frac{\sqrt{b} \cdot a}{c^2 \cdot d^3}.$$

Решение. Применяя свойства логарифмов, получим

$$\begin{aligned} \log_a X &= \log_a \frac{\sqrt{b} \cdot a}{c^2 \cdot d^3} = \log_a (\sqrt{b} \cdot a) - \log_a (c^2 d^3) = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a a - (\log_a c^2 + \log_a d^3) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a b + 1 - 2 \log_a c - 3 \log_a d. \end{aligned}$$

Во многих случаях приходится решать обратную задачу, т. е. находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел. Такое преобразование называют *потенцированием*.

Пример 2. Найти x , если

$$\log_a x = 5 \log_a b - 2 \log_a c - 3 \left(\log_a d + \frac{1}{2} \log_a t \right).$$

Решение. Используя свойства логарифмов, получаем:

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a b^5 - \log_a c^2 - 3 \log_a d - \frac{3}{2} \log_a t = \log_a b^5 - \left(\log_a c^2 + \log_a d^3 + \log_a t^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \log_a b^5 - \log_a (c^2 \cdot d^3 \cdot \sqrt[3]{t}) = \log_a \frac{b^5}{c^2 \cdot d^3 \cdot \sqrt[3]{t}}. \end{aligned}$$

Таким образом $\log_a x = \log_a \frac{b^5}{c^2 \cdot d^3 \cdot \sqrt[3]{t}}$.

Отсюда $x = \frac{b^5}{c^2 \cdot d^3 \cdot \sqrt[3]{t}}.$

6.2.5. Определение и свойства функции $y = \log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) и её график

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$.

6.2.5.1. Свойства логарифмической функции.

1. Область определения: $(0; +\infty)$, что следует из определения логарифма.
 2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$.
 3. Чётность или нечётность. Функция не является чётной и не является нечётной, т. к. чётная или нечётная функция имеют область определения, симметричную относительно нуля.
 4. Нули функции: $y = 0$, $\log_a x = 0$, следовательно $x = 1$. Значит, график функции пересекает ось Ox в точке с абсциссой 1.
 5. Промежутки монотонности. Если $a > 1$, то логарифмическая функция строго возрастает, если $0 < a < 1$, то она строго убывает.
6. Если $a > 1$, то при $x \rightarrow 0$ $\log_a x \rightarrow -\infty$, так как чтобы получить x надо a возводить в степень с отрицательным показателем.
 Если $0 < a < 1$, то при $x \rightarrow 0$ $\log_a x \rightarrow +\infty$, так как чтобы получить x надо a возводить в степень с положительным показателем.

6.2.5.2. График логарифмической функции.

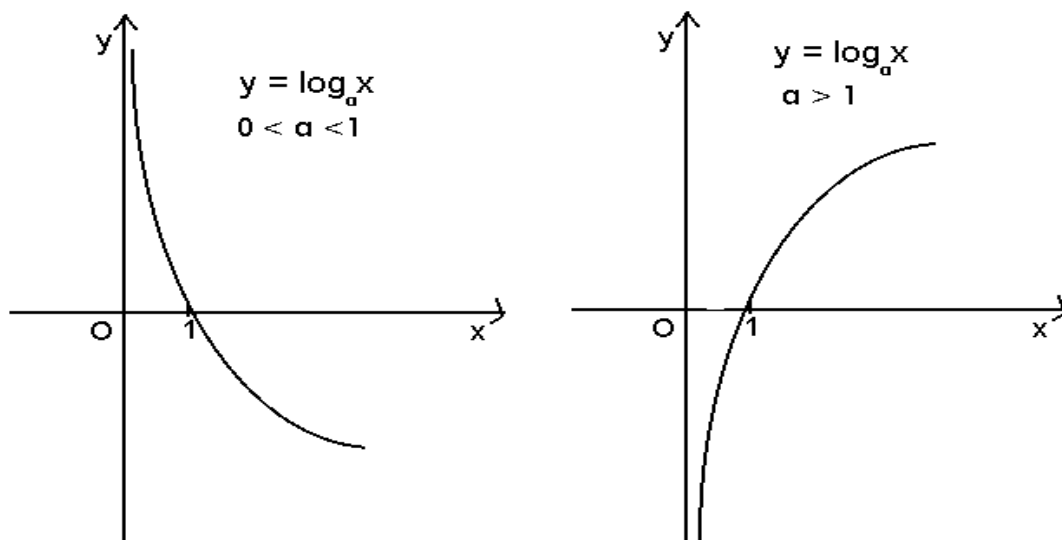


Рис. 1.

6.2.6. Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Логарифмическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма:

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x).$$

Функция $h(x)$ должна удовлетворять условиям: $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$; функции $f(x)$ и $g(x)$ должны быть положительными. В этих условиях справедливо утверждение

Теорема. *Логарифмическое уравнение*

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x).$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

В общем случае это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ h(x) > 0; \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

В частном случае, когда $h(x) = a$, причём $a > 0$, $a \neq 1$ это уравнение принимает вид

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

При решении уравнений вида

$$F(\log_a f(x)) = 0,$$

где $F(\log_a f(x))$ - многочлен, вводится новая переменная $t = \log_a f(x)$.

Уравнения, содержащие переменную в основании и в показателе степени, решают, как правило, логарифмированием обеих частей. Если в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения логарифмируют по основанию этого логарифма.

При решении логарифмических неравенств следует обращать внимание на то, что при основании, большем единицы, логарифмическая функция монотонно возрастает, а при положительном основании, меньшем единицы, - монотонно убывает. В связи с этим при $a > 1$ неравенство

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

равносильно неравенству

$$f(x) < g(x),$$

а при $0 < a < 1$ - равносильно неравенству

$$f(x) > g(x)$$

в области определения неравенства.

Аналогично

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1; \\ f(x) > g(x); \\ 0 < a < 1; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенства вида

$$\log_{h(x)} f(x) > 0 \text{ (или } < 0); \log_{h(x)} f(x) > c \text{ (или } < c)$$

где c - некоторое число.

Решение каждого неравенства сводится к решению совокупности двух систем неравенств, равносильной данному неравенству в области его определения.

Используя свойство логарифмов о том, что логарифм положителен, если логарифмируемое число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, и логарифм отрицателен, если они лежат по разные стороны от единицы, можем записать, что неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > 0$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 1; \\ h(x) > 1; \\ 0 < f(x) < 1; \\ 0 < h(x) < 1, \end{cases}$$

а неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 1; \\ 0 < f(x) < 1; \\ 0 < f(x) < 1; \\ h(x) > 1. \end{cases}$$

Неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > c$$

можно заменить неравенством

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} (h(x))^c$$

и использовать свойство монотонности логарифмической функции. Поэтому неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > c \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 1; \\ f(x) > (h(x))^c; \\ 0 < h(x) < 1; \\ 0 < f(x) < (h(x))^c. \end{cases}$$

Неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > c \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 1; \\ 0 < f(x) < (h(x))^c; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1; \\ f(x) > (h(x))^c. \end{cases}$$